

NOMBRE Y APELLIDO.....
CORREO:.....
CURSO:2DO 9

PRIMER PARCIAL DE ANÁLISIS II

FECHA:03/06/24

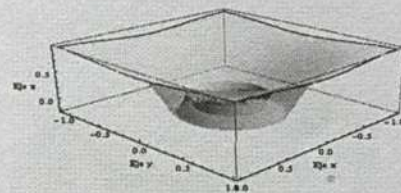
Ejercicios	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5	6	Nota
Puntaje	0.5	1.5	1.5	0.5	1	1	1	1	1	1	

Ejercicio 1a) ¿Cuál es el método que se aplica para calcular extremos de una función a optimizar de la forma $U = U(x, y, z)$ sabiendo que las variables involucradas en la función están restringidas a una condición $G(x, y, z) = 0$? Explique su condición necesaria e interpretación geométrica. ¿Qué condición debe cumplirse para que la función alcance un extremo?

Ejercicio 1b) Hallar la distancia mínima y máxima de la cónica $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16 = 0$ al origen de coordenadas. Verificar las respuestas obtenidas con diferencial segundo.

Ejercicio 2) Dada la siguiente función definida de la forma

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Ejercicio 2a) ¿Tiene plano tangente en el origen? Justifique la respuesta en forma analítica (A la derecha, la gráfica de la función). En caso afirmativo, escriba su ecuación

Ejercicio 2b) ¿Es continua en el punto? ¿Tiene derivada en cualquier dirección y sentido en el mismo? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3a) Calcular, la derivada direccional de la función $f(x, y) = 2x^2 - 2y$ en el punto $(3, 3)$ y en la dirección $\hat{\theta} = \frac{1}{3}\pi$. ¿En qué direcciones es nula la derivada direccional en ese punto? ¿En qué dirección es máxima? ¿Cuál es su valor? ¿Qué significado tiene ese valor?. Realice una representación gráfica en el plano de lo pedido en forma analítica.

Ejercicio 3b) Explique la relación entre la derivada direccional, el vector gradiente y su interpretación geométrica.

Ejercicio 4a) Dada la ecuación diferencial $\frac{d^2y(x)}{dx^2} - k \frac{dy}{dx} + 4y(x) = \cos(x)$, se pide:

Para qué valor de k la solución de la EDH asociada es de la forma $y_H(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$? Justifique

Ejercicio 4 b) Para el valor de k obtenido, obtenga la SP de la ED siendo las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$

Ejercicio 5) Verificar que existe z_0 para la cual la ecuación $xy + z + xz^2 + \ln(2z + y - 4) - 6 = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Calcular sus derivadas y enuncie las condiciones que se deben cumplir para ello.

Ejercicio 6) Una curva que responde a una función $y = f(x)$ pasa por el origen. Por un punto arbitrario de la curva, en el primer cuadrante, se trazan paralelas a los ejes de tal manera que forma un rectángulo con ellos. La curva divide al rectángulo en dos regiones A y B tal que una de ellas tiene un área n veces la otra. Hallar la función $y = f(x)$.

Nota: Tenga en cuenta lo que conoce de integrales definidas en una variable.

EJ1 a) ¿Cuál es el método que se aplica para calcular extremos de una función a optimizar de la forma $U = U(x, y, z)$ sabiendo que las variables involucradas en la función están restringidas a una condición $G(x, y, z) = 0$?

Explicar condición necesaria e interpretación geométrica

¿Qué condición debe cumplirse para que la función alcance un extremo?

El método es el de los Multiplicadores de Lagrange

Interpretación geométrica: $\nabla U = \lambda \nabla G$

El punto óptimo se obtiene cuando el gradiente de U es paralelo al gradiente de G

↳ En el extremo, las curvas (o superficies) de nivel de U son tangentes a la sup. definida por G

Condición necesaria: los primeros derivadas de $L(x, y, z, \lambda)$ deben ser nulas

$$L(x, y, z, \lambda) = U(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$$

El gradiente de la función y de la restricción debe ser NO NULO

Ej 1 b hallar la distancia mínima y máxima de la cónica $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16 = 0$ al origen de coordenadas.

Verificar los resultados obtenidos con diferencial segundo

Función distancia = $\sqrt{x^2 + y^2}$ usamos el radicando para optimizar

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16)$$

$$\begin{cases} F'_x = 0 = 2x + \lambda(10x + 6y) \rightarrow \lambda = \frac{-2x}{10x + 6y} \text{ (I)} \\ F'_y = 0 = 2y + \lambda(6x + 10y) \rightarrow \lambda = \frac{-2y}{6x + 10y} \text{ (II)} \\ F'_\lambda = 0 = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16 \end{cases}$$

$$\text{(I)} \text{ y } \text{(II)} \quad \frac{-2x}{10x + 6y} = \frac{-2y}{6x + 10y}$$

$$\frac{x}{5x + 3y} = \frac{y}{3x + 5y} \rightarrow x(3x + 5y) = y(5x + 3y)$$

$$3x^2 + 5xy = 5xy + 3y^2$$

$$\boxed{y = x} \rightarrow 0 = 5x^2 + 6xx + 5x^2 - 16$$

$$16x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 1$$

$$|x| = |y| \rightarrow \boxed{y = \pm x}$$

$$\rightarrow \boxed{PC_1 = (1, 1) \quad PC_2 = (-1, -1)}$$

$$\boxed{y = -x} \rightarrow 0 = 5x^2 + 6x(-x) + 5(-x)^2 - 16$$

$$\rightarrow 4x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\boxed{PC_3 = (2, -2) \quad PC_4 = (-2, 2)}$$

Evalúo PC en $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow f(1, 1) = f(-1, -1) = \sqrt{2}$

$$f(2, -2) = f(-2, 2) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Distancia máxima: $2\sqrt{2}$ en los puntos $(2, -2)$ y $(-2, 2)$

" mínima: $\sqrt{2}$ en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$

Diferencial segundo: hallamos $\lambda = \frac{-2x}{10x + 6y} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{-x}{5x + 3y}}$

$$\text{en } (1, 1) \rightarrow \lambda = \frac{-1}{5+3} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{en } (-1, -1) \rightarrow \lambda = \frac{-(-1)}{-5-3} = -\frac{1}{8}$$

$$\boxed{\text{Para } (1, 1) \text{ y } (-1, -1) \rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}}$$

Para $(-2, 2)$ y $(2, -2)$:

$$\lambda_{(-2,2)} = \frac{-(-2)}{-10+6} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_{(2,-2)} = \frac{-2}{10-6} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Para $(2, -2)$ y $(-2, 2) \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

$$F''_{xx} = 2 + 10\lambda$$

$$F''_{xy} = 6\lambda$$

$$F''_{yy} = 2 + 10\lambda$$

$(1, 1)$	$(-1, -1)$	$(2, -2)$	$(-2, 2)$
$3/4$	$3/4$	-3	-3
$-3/4$	$-3/4$	-3	-3
$3/4$	$3/4$	-3	-3

$$d^2F = \frac{3}{4} (dx^2 + 2 dx dy + dy^2) > 0 \rightarrow \text{en } (1, 1) \text{ y } (-1, -1) \text{ la dist es m\u00ednima}$$

$$d^2F = -3 (dx^2 + 2 dx dy + dy^2) < 0 \rightarrow \text{en } (2, -2) \text{ y } (-2, 2) \text{ la dist es m\u00e1xima}$$

ES 2. Dada la sig. función definida de la forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) & f(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & f(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) ¿tiene plano tangente en el origen?

Análisis de diferenciabilidad $\Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = 0$?

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x^2 + 0^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\Delta x^2 + 0^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (0^2 + \Delta y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{0^2 + \Delta y^2} \right) = 0$$

$$dz = 0$$

$$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right)$$

uso coord
polares

$$\Delta x = \rho \cos(\varphi) \\ \Delta y = \rho \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)} \right)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi)) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\rho^2 (\cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi))} \right)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\rho^2} \right)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\rho^2} \right) = 0$$

ES diferenciable

b) ¿Es continua en el punto? ¿tiene derivada en cualquier direc-
ción y sentido en el mismo?

Como f es diferenciable en el origen entonces es continua
y derivable en el origen.

EJ 3) a) Calcular derivada direccional de la función $f(x,y) = 2x^2 - 2y$ en el punto $(3,3)$ en la dirección $\hat{\theta} = \frac{1}{3}\pi$

f es diferenciable (es un polinomio) $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3) = \nabla f(3,3) \cdot \vec{v}$

$$\begin{cases} f'_x = 4x \\ f'_y = -2 \end{cases} \text{ en } (3,3) \rightarrow \nabla f(3,3) = (12, -2)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \operatorname{tg}(\hat{\theta}) = \frac{y}{x} \rightarrow y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)x$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{n} = (x, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)x) = x(1, \sqrt{3})$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3) = (12, -2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 - \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3) = 6 - \sqrt{3}$$

¿En qué direcciones es nula la derivada direccional en ese punto?

¿En qué dirección es máxima? ¿Cuál es su valor?

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3) \Big|_{\max}$ en la dirección del gradiente y su valor es $\|\nabla f(3,3)\|$
y las direcciones nulas son los perpendiculares al gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3) \Big|_{\max} = \|\nabla f(3,3)\| = \sqrt{12^2 + (-2)^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3) \Big|_{\max} = 2\sqrt{37}$$

Direcc. deriv. direcc. Nulas

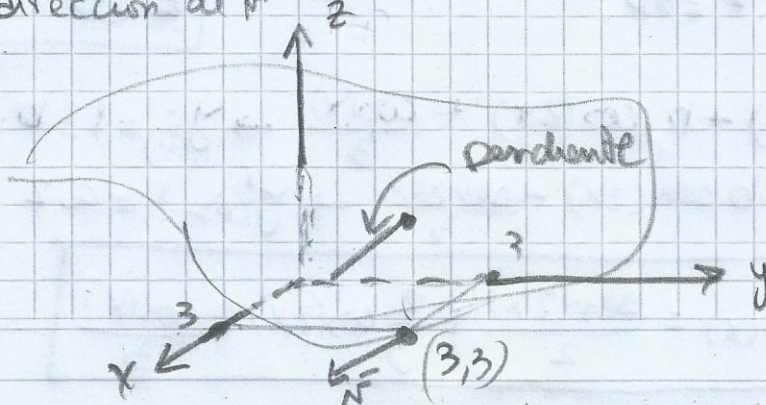
$$\nabla f(3,3) = (12, -2) \rightarrow \vec{n}_1 = (2, 12)$$

$$\vec{n}_2 = (-2, -12)$$

$$\vec{v} \Big|_{\max} = (12, -2)$$

¿Qué significado tiene ese valor?

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,3)$ es la pendiente de la gráfica de la función en la dirección de \vec{v}



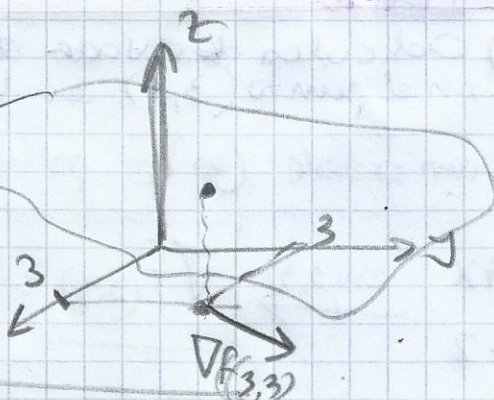
Ex 3 b) Explicar la relación entre la derivada direccional, vector gradiente y su interpretación geométrica

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(3,3) = \nabla f(3,3) \cdot \vec{n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(3,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,3), \frac{\partial f}{\partial y}(3,3) \right) (a,b)$$

$$\vec{n} = (a,b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(3,3) = a \frac{\partial f}{\partial x}(3,3) + b \frac{\partial f}{\partial y}(3,3)$$



Ex 4 a) Dada la ecuación diferencial $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - k \frac{dy}{dx} + y(x) = \cos(x)$

se pide hallar el valor de k si la solución de la EDH es de la forma $y_H(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$

quiere decir que las raíces del polinomio característico son complejas $\rightarrow z = A \pm Bi$

$$y_H = a e^{Ax} \sin(Bx) + b e^{Ax} \cos(Bx)$$

Como no tiene $e^{4x} \Rightarrow A=0 \rightarrow B=2 \quad r = \pm 2j$

$$\text{SH) } y'' - ky' + 4y = 0 \rightarrow r^2 - kr + 4 = 0 \quad r^2 = -4 \rightarrow \text{raíces}$$

$$\boxed{k=0}$$

b) Para el valor de k obtenido, obtener la SP de la ED. $y(0) = y'(0) = 1$

$$y'' + 4y = \cos(x) \rightarrow y_p = D \cos(x) + E \sin(x)$$

$$y_p' = -D \sin(x) + E \cos(x)$$

$$y_p'' = -D \cos(x) - E \sin(x)$$

$$-D \cos(x) - E \sin(x) + 4D \cos(x) + 4E \sin(x) = \cos(x)$$

$$\cos(x) (-D + 4D) + \sin(x) (-E + 4E) = \cos(x) + 0 \sin(x)$$

$$\downarrow = 3D$$

$$\boxed{E=0 \quad D=1/3}$$

$$y_p = \frac{1}{3} \cos(x)$$

$$y_G = a \sin(2x) + b \cos(2x) + \frac{\cos(x)}{3} \rightarrow y(0) = 1 = b + \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{b = 2/3}$$

$$y_G' = a \cos(2x) \cdot 2 - 2b \sin(2x) - \frac{\sin(x)}{3} \rightarrow y'(0) = 1 = a \cdot 2 \rightarrow \boxed{a = 1/2}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{2}{3} \cos(2x) + \frac{\cos(x)}{3}}$$

EJ 5 Verificar que existe z_0 para la cual la ecuación $xyz + xz^2 + \ln(2z + y - 4) - 6 = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Calcular sus derivadas y enunciar las condiciones que se deben cumplir para ello

$$z_0 = f(1, 1): \quad F(x, y, z) = xyz + xz^2 + \ln(2z + y - 4) - 6$$

$$\rightarrow F(1, 1, z_0) = 0 = z_0 + z_0^2 + \ln(2z_0 - 3) - 6$$

$$z_0 = 2 \text{ cumple}$$

$$P = (1, 1, 2)$$

$$\bullet F(1, 1, 2) = 0 \checkmark$$

$\bullet F \in C^1$ (suma algebraica de funciones elementales)

$$\bullet F'_z(1, 1, 2) = xy + 2xz + \frac{1}{2z + y - 4} \cdot 2 \Big|_{(1, 1, 2)} = 1 + 4 + 2 = 7 \neq 0 \checkmark$$

$$f'_x(1, 1) = - \frac{F'_x(1, 1, 2)}{F'_z(1, 1, 2)} = - \frac{6}{7}$$

$$f'_y(1, 1) = - \frac{F'_y(1, 1, 2)}{F'_z(1, 1, 2)} = - \frac{3}{7}$$

$$F'_x = yz + z^2 \rightarrow F'_x(1, 1, 2) = 2 + 4 = 6$$

$$F'_y = xz + \frac{1}{2z + y - 4} \rightarrow F'_y(1, 1, 2) = 2 + 1 = 3$$

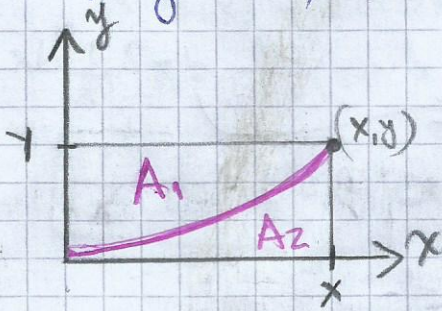
$$\boxed{\begin{aligned} f'_x(1, 1) &= -6/7 \\ f'_y(1, 1) &= -3/7 \end{aligned}}$$

6) Una curva que responde a una función $y = f(x)$ pasa por el origen.

Por un punto arbitrario de la curva se trazan paralelas a los ejes de tal manera que forme un rectángulo con ellos.

La curva divide al rectángulo en 2 regiones A y B tal que una de ellas tiene un área m veces la otra.

hallar $y = f(x)$



$$A = A_1 + A_2 = x \cdot y$$

$$A_1 = m A_2$$

$$y = f(x)$$

$$A = A_1 + A_2 = m A_2 + A_2 = (m+1) A_2$$

$$x y = (m+1) \int_0^x \int_0^t f(t) dt dx$$

$$x y = (m+1) \int_0^x f(t) dt$$

$$\frac{d}{dx} x y = \frac{d}{dx} (m+1) \int_0^x f(t) dt$$

$$y + x y' = (m+1) f(x) \cdot 1$$

$$y + x y' = (m+1) y = m y + y$$

$$x y' = m y + y - y$$

$$x y' = m y$$

$$x \frac{dy}{dx} = m y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{m}{x} dx$$

$$\ln(y) = m \ln(x) + C =$$

$$= \ln(x^m) + C$$

$$e^{\ln(y)} = e^{\ln(x^m)} \cdot e^C$$

$$\boxed{y = k x^m}$$

derivado x como variable
" y como función